# TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

# 8

## En este capítulo

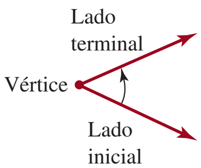


Una rebanada de pizza es un ejemplo de sector circular. Véase el problema 73 de los ejercicios 8.1.

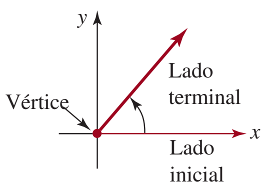
**Un poco de historia** Los rudimentos de la trigonometría se remontan al trabajo de matemáticos griegos, egipcios, indios, árabes y chinos. La palabra *trigonometría* se deriva de dos vocablos griegos: *trigon,* que significa triángulo, y *metro,* que significa medida. Por tanto, el nombre *trigonometría* hace alusión a las diversas relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados. El astrónomo y matemático griego **Hiparco**, que vivió en el siglo II antes de Cristo, fue uno de los principales inventores de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que elaboró fueron precursoras de las tablas de valores de las funciones trigonométricas que aparecían en todos los textos de trigonometría hasta antes de la invención de la calculadora de mano. El primer matemático europeo que definió las funciones trigonométricas directamente en términos de triángulos rectángulos en lugar de círculos, con tablas de las seis funciones trigonométricas, fue el matemático y astrónomo austriaco **Georg Joachim von Lauchen** (1514-1574), también conocido como **Georg Joachim Rheticus**. Además, Rheticus es recordado porque fue el único discípulo de **Nicolás Copérnico** (1473-1543) y el primer defensor de la teoría heliocéntrica del sistema solar propuesta por su maestro.

Empezaremos este capítulo con una explicación de los ángulos y dos formas de medirlos. La sección 8.2 se dedicará a definir las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. En la sección 8.4 extendemos estas definiciones a los ángulos generales.

## 8.1 Ángulos y sus medidas



*a*) Dos medios rayos



*b*) Posición normal

**FIGURA 8.1.1** Lados inicial y terminal de un ángulo

**Introducción** Comenzamos nuestro estudio de la trigonometría con la descripción de los ángulos y dos métodos para medirlos: en grados y en radianes. Como veremos en la sección 9.1, la medida de un ángulo en radianes es lo que nos permite definir funciones trigonométricas en conjuntos de números reales.

**Ángulos** Un **ángulo** se forma con dos rayos o semirrectas, que tienen un extremo común llamado **vértice**. A un rayo lo llamaremos **lado inicial** del ángulo, y al otro, **lado terminal**. Es útil imaginar al ángulo como formado por una rotación, desde el lado inicial hasta el lado terminal, como se ve en la **FIGURA 8.1.1*a*)**. El ángulo se puede poner en un plano cartesiano con su vértice en el origen y su lado inicial que coincida con el eje positivo de las *x*, como se ve en la figura 8.1.1*b*). En ese caso se dice que el ángulo está en su **posición normal** o estándar.

**Medición en grados** La medición de un ángulo en **grados** se basa en la asignación de 360 grados (se escribe 360°) al ángulo formado por una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se indica en la **FIGURA 8.1.2**. Entonces, otros ángulos se miden en función de un ángulo de 360°, y un ángulo de 1° es el que se forma por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa. Si la rotación es contraria a la de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si es en el sentido de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*. Por ejemplo, el ángulo de la **FIGURA 8.1.3*a*)** se obtiene con un cuarto de rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y es

$$\tfrac{1}{4}(360^\circ) = 90^\circ.$$

También se ve en la figura 8.1.3*b*) el ángulo formado por tres cuartos de rotación completa en sentido de las manecillas del reloj. Este ángulo mide:

$$\tfrac{3}{4}(-360^\circ) = -270^\circ.$$

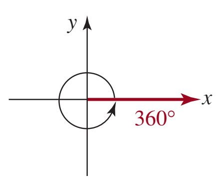
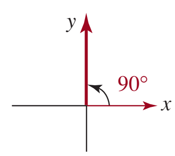
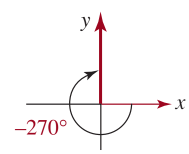


**FIGURA 8.1.2** Ángulo de 360 grados



*a*) Ángulo de 90°



*b*) Ángulo de –270°

**FIGURA 8.1.3** *a*) Medida positiva; *b*) medida negativa

**Ángulos coterminales** Una comparación de la figura 8.1.3*a*) con la figura 8.1.3*b*) demuestra que el lado terminal de un ángulo de 90° coincide con el lado terminal de un ángulo de −270°. Cuando dos ángulos en la posición normal tienen los mismos lados terminales se dice que los ángulos son **coterminales**. Por ejemplo, los ángulos $\theta$, $\theta + 360^\circ$ y $\theta - 360^\circ$ que se ven en la **FIGURA 8.1.4** son coterminales. De hecho, la suma de cualquier múltiplo entero de 360° a un ángulo dado da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera tienen medidas en grados que difieren por un múltiplo entero de 360°.

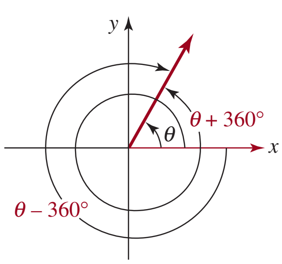


**FIGURA 8.1.4** Tres ángulos coterminales

### EJEMPLO 1 Ángulos y ángulos coterminales

En el caso de un ángulo de 960°,

***a***) Ubicar el lado terminal y trazar el ángulo.
***b***) Determinar un ángulo coterminal entre 0° y 360°.
***c***) Determinar un ángulo coterminal entre −360° y 0°.

Solución

***a***) Primero se determina cuántas rotaciones completas se dan para formar este ángulo. Al dividir 960 entre 360 se obtiene un cociente de 2, y un residuo de 240; esto es,

$$960 = 2(360) + 240.$$

Entonces, este ángulo se forma dando dos rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y haciendo después $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$ de otra rotación. Como se ve en la **FIGURA 8.1.5*a*)**, el lado terminal de 960° está en el tercer cuadrante.

***b***) La figura 8.1.5*b*) muestra que el ángulo de 240° es coterminal con un ángulo de 960°.

***c***) La figura 8.1.5*c*) muestra que el ángulo de $-120°$ es coterminal con un ángulo de 960°.

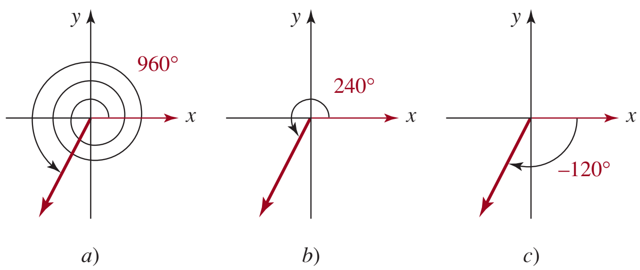



**FIGURA 8.1.5** Los ángulos en *b*) y en *c*) son coterminales con el ángulo en *a*).

■ **Minutos y segundos** Con las calculadoras es conveniente expresar las fracciones de grados con decimales, por ejemplo, 42.23°. Sin embargo, tradicionalmente las fracciones de grados se han expresado en **minutos** y **segundos**, donde

$$1° = 60 \text{ minutos (se escribe } 60')^* \tag{1}$$

y

$$1' = 60 \text{ segundos (se escribe } 60'') \tag{2}$$

Por ejemplo, un ángulo de 7 grados, 30 minutos y 5 segundos se expresa así: 7°30′5″. Algunas calculadoras tienen una tecla especial DMS (notación DMS, acrónimo en inglés que significa grados, minutos y segundos) para convertir un ángulo expresado en grados decimales en grados, minutos y segundos y viceversa. Los siguientes ejemplos muestran cómo realizar a mano estas conversiones.

## EJEMPLO 2 Usar (1) y (2)

Convierta:

***a***) 86.23° en grados, minutos y segundos;

***b***) 17°47′13″ en notación decimal.

Solución En cada caso usaremos (1) y (2).

***a***) Como 0.23° representa $\frac{23}{100}$ de 1° y $1° = 60'$, tenemos

$$\begin{aligned} 86.23° &= 86° + 0.23° \\ &= 86° + (0.23)(60') \\ &= 86° + 13.8' \end{aligned}$$

Ahora bien, $13.8' = 13' + 0.8'$, por lo que debemos convertir $0.8'$ en segundos. Puesto que $0.8'$ representan $\frac{8}{10}$ de $1'$ y $1' = 60''$, tenemos

* El uso del número 60 como base se remonta a los babilonios. Otro ejemplo del uso de esta base en nuestra cultura es la medida del tiempo (1 hora = 60 minutos y 1 minuto = 60 segundos).

$$86° + 13' + 0.8' = 86° + 13' + (0.8)(60'')$$
$$= 86° + 13' + 48''.$$

Por tanto, $86.23° = 86°13'48''$.

***b***) En virtud de que $1° = 60'$, se desprende que $1' = (\frac{1}{60})°$. Del mismo modo, encontramos que $1'' = (\frac{1}{60}) = (\frac{1}{1\,360})°$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} 17°47'13'' &= 17° + 47' + 13'' \\ &= 17° + 47(\tfrac{1}{60})° + 13(\tfrac{1}{3\,600})° \\ &\approx 17° + 0.7833° + 0.0036° \\ &= 17.7869°. \end{aligned}$$

≡

**Medida en radianes** En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como ya sabemos, un ángulo $\theta$ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de $x$ hasta el lado terminal. Como se ve en la **FIGURA 8.1.6**, el lado inicial de $\theta$ recorre una distancia $t$ a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de $\theta$ es ***t* radianes**.

En radianes se usa la misma convención que con la medida en grados: un ángulo formado por una rotación contraria a las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Como la circunferencia del círculo unitario es $2\pi$, un ángulo formado por una rotación en contra de las manecillas del reloj es $2\pi$ radianes. En la **FIGURA 8.1.7** se han ilustrado ángulos de $\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi$ y $3\pi$ radianes, respectivamente. De acuerdo con las figuras 8.1.8*c*) y 8.1.8*d*), un ángulo de $\pi$ radianes es coterminal con uno de $3\pi$ radianes.

$$\theta = \frac{s}{r}. \tag{3}$$

En el caso en que el lado terminal de $\theta$ atraviesa un arco de longitud $s$ a lo largo de la circunferencia del círculo igual al radio $r$ del círculo, nos damos cuenta, por (3), de que la medida del ángulo $\theta$ es **1 radián**. Véase la figura 8.1.6*b*)

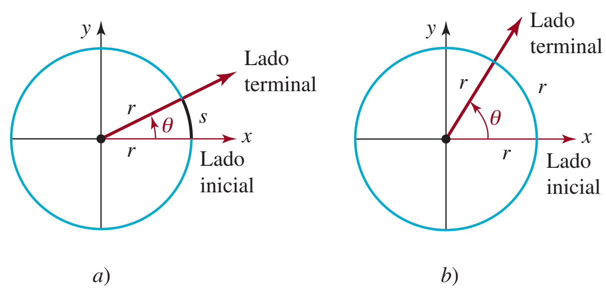



**FIGURA 8.1.6** Ángulo central en *a*); ángulo de 1 radián en *b*)

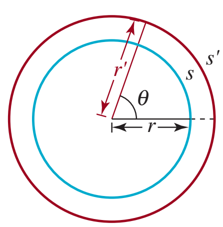



**FIGURA 8.1.7** Círculos concéntricos

La definición dada en (3) no depende del tamaño del círculo. Para entender esto, lo único que necesitamos hacer es dibujar otro círculo centrado en el vértice de $\theta$ de radio $r'$ y longitud de arco subtendido $s'$. Véase la **FIGURA 8.1.7**. Debido a que los dos sectores circulares son similares, las razones $s/r$ y $s'/r'$ son iguales. Por consiguiente, independientemente del círculo que utilicemos, obtendremos la misma medida en radianes de $\theta$.

En la ecuación (3) se puede usar cualquier unidad de longitud conveniente para $s$ y $r$, pero es necesario usar la misma unidad *tanto* para $s$ *como* para $r$. Así,

$$\theta\,(\text{en radianes}) = \frac{s\,(\text{unidades de longitud})}{r\,(\text{unidades de longitud})}$$

parece ser una cantidad “sin dimensión”. Por ejemplo, si $s = 6$ pulgadas y $r = 2$ pulgadas, entonces la medida del ángulo en radianes es

$$\theta = \frac{4 \text{ pulgadas}}{2 \text{ pulgadas}} = 2,$$

donde 2 es simplemente un número real. Por esta razón, algunas veces se omite la palabra *radianes* cuando el ángulo se mide en radianes. Retomaremos esta idea en la sección 9.1.

Una rotación completa del lado inicial de $\theta$ atravesará un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$. Se desprende de (3) que

$$\text{una rotación} = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes.}$$

Tenemos la misma convención que antes: un ángulo formado por una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las agujas del reloj es negativa. En la **FIGURA 8.1.8** ilustramos ángulos en las posiciones estándares de $\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi$ y $3\pi$ radianes, respectivamente. Tenga en cuenta que el ángulo de $\pi/2$ radianes que se muestra en *a*) se obtiene de un cuarto de una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj; es decir

$$\frac{1}{4}(2\pi \text{ radianes}) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

El ángulo que presenta la figura 8.1.8*b*), obtenido de un cuarto de rotación completa en el sentido de las agujas del reloj, es $-\pi/2$ radianes. El ángulo ilustrado en la figura 8.1.8*c*) es coterminal con el ángulo de la figura 8.1.8*d*). En general, la suma de cualquier múltiplo entero de $2\pi$ radianes a un ángulo expresado en radianes da como resultado un ángulo coterminal. Al revés, dos ángulos coterminales cualesquiera expresados en radianes diferirán en un múltiplo entero de $2\pi$.

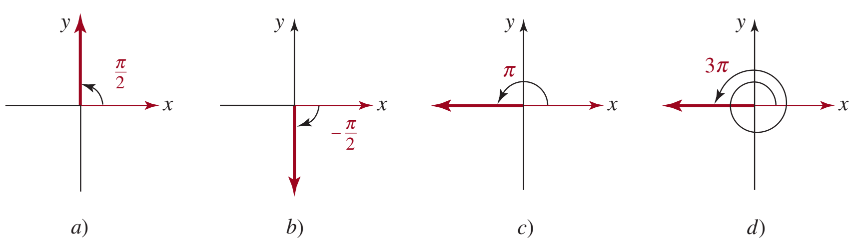



**FIGURA 8.1.8** Ángulos expresados en radianes

## EJEMPLO 3 Ángulo coterminal

Determinar un ángulo entre 0 y $2\pi$ radianes, que sea coterminal con $\theta = 11\pi/4$ radianes. Trazar el ángulo.

**Solución** Como $2\pi < 11\pi/4 < 3\pi$, se resta el equivalente de una rotación, o sea $2\pi$ radianes, para obtener

$$\frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

De igual forma, una alternativa es proceder como en el inciso *a*) del ejemplo 1, y dividir: $11\pi/4 = 2\pi + 3\pi/4$. Entonces, un ángulo de $3\pi/4$ radianes es coterminal con $\theta$, como vemos en la **FIGURA 8.1.9**. ≡

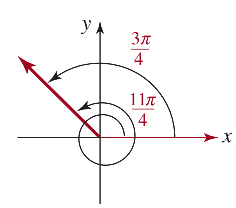



**FIGURA 8.1.9** Ángulos coterminales del ejemplo 3

**■ Fórmulas de conversión** Si bien muchas calculadoras científicas tienen teclas que convierten mediciones entre grados y radianes, hay una forma fácil de recordar la relación entre las dos medidas. Como la circunferencia de un círculo unitario es $2\pi$, una rotación completa mide $2\pi$ radianes, y también 360°. Por consiguiente, $360° = 2\pi$ radianes, o

$$180° = \pi \text{ radianes}. \tag{4}$$

Si (4) se interpreta como $180\,(1°) = \pi$ (1 radián), entonces se obtienen las dos fórmulas siguientes para convertir entre grados y radianes.

**CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES**

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \tag{5}$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \tag{6}$$

Con una calculadora se hacen las divisiones en (5) y (6), y se llega a

$$1° \approx 0.0174533 \text{ radián} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ radián} \approx 57.29578°.$$

### EJEMPLO 4 Conversión entre grados y radianes

Convertir

***a)*** 20° a radianes, ***b)*** $7\pi/6$ radianes a grados, ***c)*** 2 radianes a grados.

**Solución**

***a)*** Para convertir grados en radianes se usa la ecuación (5):

$$20° = 20(1°) = 20 \cdot \left(\frac{\pi}{180} \text{ radián}\right) = \frac{\pi}{9} \text{ radián}.$$

***b)*** Para convertir radianes en grados, se usa la ecuación (6):

$$\frac{7\pi}{6} \text{ radianes} = \frac{7\pi}{6} \cdot (1 \text{ radián}) = \frac{7\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 210°.$$

***c)*** De nuevo se usa (6):

$$2 \text{ radianes} = 2 \cdot (1 \text{ radián}) = 2 \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ} \approx \overbrace{114.59°}^{\text{respuesta aproximada redondeada a dos decimales}}.$$

≡

**TABLA 8.1.1**

| Grados | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |

La tabla que sigue muestra las medidas de los ángulos de uso más frecuente, expresadas en radianes y en grados.

■ **Terminología** El lector recordará que, en geometría, a un ángulo de 90° se le llama **ángulo recto**, y a un ángulo de 180° se le llama **ángulo recto doble**. En radianes, $\pi/2$ es un ángulo recto, y $\pi$ es un ángulo recto doble. Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90° (o entre 0 y $\pi/2$ radianes), y un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180° (o entre $\pi/2$ y $\pi$ radianes). Se dice que dos ángulos agudos son **complementarios** si suman 90° (o $\pi/2$ radianes). Dos ángulos positivos son **suplementarios** si suman 180° (o $\pi$ radianes). Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Un ángulo cuyo lado terminal coincide con un eje de coordenadas se llama **ángulo cuadrantal**. Por ejemplo, 90° (o $\pi/2$ radianes) es un ángulo cuadrantal. Un triángulo que contiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo**. Las longitudes $a$, $b$ y $c$ de los lados de un triángulo rectángulo satisfacen la relación pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, donde $c$ es la longitud del lado opuesto al ángulo recto (la hipotenusa); los otros dos lados, $a$ y $b$, son los catetos.

### EJEMPLO 5 Ángulos complementarios y suplementarios

***a***) Calcular el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$.
***b***) Calcular el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes.

**Solución**

***a***) Como dos ángulos son complementarios si suman 90°, se ve que el ángulo que es complementario de $\theta = 74.23°$ es

$$90° - \theta = 90° - 74.23° = 15.77°.$$

***b***) Como dos ángulos son suplementarios si suman $\pi$ radianes, se ve que el ángulo que es suplementario de $\phi = \pi/3$ radianes es

$$\pi - \phi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

≡

**Longitud de arco** Un ángulo $\theta$ con su vértice en el centro de un círculo de radio $r$ se llama **ángulo central**. La región dentro del círculo contenida en el ángulo central $\theta$ se llama **sector**. Como se ve en la **FIGURA 8.1.10**, la longitud del arco del círculo abarcado (subtendido, o cortado) por el ángulo $\theta$ se representa con $s$. Cuando se mide en radianes, el ángulo central $\theta$ corresponde a $\theta/2\pi$ de una rotación completa. Por consiguiente, el arco abarcado por $\theta$ es $\theta/2\pi$ de la circunferencia del círculo. Así, la longitud $s$ del arco es

$$s = \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = r\theta,$$

siempre que $\theta$ se exprese en radianes. Este resultado se resume como sigue:

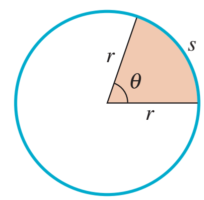



**FIGURA 8.1.10** Longitud de arco $s$, determinada por un ángulo central $\theta$

**Teorema 8.1.1 Fórmula de la longitud del arco**

Un ángulo central de $\theta$ radianes en un círculo de radio $r$ abarca un arco de longitud

$$s = r\theta. \tag{7}$$

Mediante la ecuación (7) se puede expresar la medida $\theta$ en radianes de un ángulo central, en un círculo, en función de la longitud del arco abarcado $s$ y del radio $r$ del círculo:

$$\theta \text{ (en radianes)} = \frac{s}{r}.$$

### EJEMPLO 6 Cálculo de la longitud del arco

Calcular la longitud del arco abarcado por un ángulo central de: ***a***) 2 radianes en un círculo de 6 pulgadas de radio, ***b***) 30° en un círculo de 12 pies de radio.

**Solución**

***a***) De acuerdo con la fórmula (7) de la longitud del arco, con $\theta = 2$ radianes, y $r = 6$ pulgadas, $s = r\theta = 2 \cdot 6 = 12$. Entonces, la longitud del arco es de 12 pulgadas.

***b***) Primero se debe expresar 30° en radianes. Recordamos que $30° = \pi/6$ radianes. Entonces, de la fórmula (7) de la longitud del arco, $s = r\theta = (12)(\pi/6) = 2\pi$. Entonces, la longitud del arco es $2\pi \approx 6.28$ pies.

≡

Con frecuencia, los alumnos aplican la fórmula de la longitud del arco en forma incorrecta, porque usan grados. Recuerde que $s = r\theta$ sólo es válida si $\theta$ se expresa en radianes.

## 8.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas 1 a 16, trace el ángulo indicado en la posición normal. Tenga en cuenta que cuando no hay símbolo de grados (°) en una medida angular, quiere decir que el ángulo está expresado en radianes.

1. $60°$
2. $-120°$
3. $135°$
4. $150°$
5. $1\,140°$
6. $-315°$
7. $-240°$
8. $-210°$
9. $\frac{\pi}{3}$
10. $\frac{5\pi}{4}$
11. $\frac{7\pi}{6}$
12. $-\frac{2\pi}{3}$
13. $-\frac{\pi}{6}$
14. $-3\pi$
15. $3$
16. $4$

En los problemas 17 a 20, exprese el ángulo dado en notación decimal.

17. $10°39'17''$
18. $143°7'2''$
19. $5°10'$
20. $10°25'$

En los problemas 21 a 24, exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

21. $210.78°$
22. $15.45°$
23. $30.81°$
24. $110.5°$

En los problemas 25 a 32, convierta los grados en radianes.

25. $10°$
26. $15°$
27. $45°$
28. $215°$
29. $270°$
30. $-120°$
31. $-230°$
32. $540°$

En los problemas 33 a 40, convierta los radianes en grados.

33. $\frac{2\pi}{9}$
34. $\frac{11\pi}{6}$
35. $\frac{2\pi}{3}$
36. $\frac{5\pi}{12}$
37. $\frac{5\pi}{4}$
38. $7\pi$
39. $3.1$
40. $12$

En los problemas 41 a 44, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a)*** entre 0° y 360°, y ***b)*** entre −360° y 0°.

41. $875°$
42. $400°$
43. $-610°$
44. $-150°$

**45.** Encuentre el ángulo entre $-360°$ y $0°$ que es coterminal con el ángulo del problema 41.

**46.** Encuentre el ángulo entre $-360°$ y $0°$ que es coterminal con el ángulo del problema 43.

En los problemas 47 a 52, calcule el ángulo coterminal de cada ángulo indicado ***a)*** entre 0 y $2\pi$ radianes, y ***b)*** entre $-2\pi$ y 0 radianes.

**47.** $-\dfrac{9\pi}{4}$

**48.** $\dfrac{17\pi}{2}$

**49.** $5.3\pi$

**50.** $-\dfrac{9\pi}{5}$

**51.** $-4$

**52.** 7.5

**53.** Encuentre el ángulo entre $-2\pi$ y 0 radianes que es coterminal con el ángulo del problema 47.

**54.** Encuentre el ángulo entre $-2\pi$ y 0 radianes que es coterminal con el ángulo del problema 49.

En los problemas 55 a 62, calcule un ángulo que sea ***a)*** complementario y ***b)*** suplementario del ángulo indicado, o diga por qué no puede calcularse ese ángulo.

**55.** $48.25°$

**56.** $93°$

**57.** $98.4°$

**58.** $63.08°$

**59.** $\dfrac{\pi}{4}$

**60.** $\dfrac{\pi}{6}$

**61.** $\dfrac{2\pi}{3}$

**62.** $\dfrac{5\pi}{6}$

**63.** Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo formado por ***a)*** tres quintas partes de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y ***b)*** cinco y un octavo rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj.

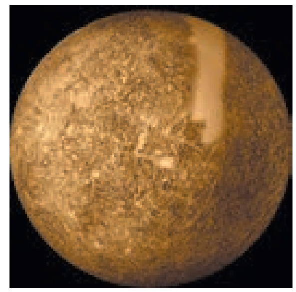
**64.** Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo obtuso formado por las manecillas de un reloj ***a)*** a las 8:00, ***b)*** a la 1:00 y ***c)*** a las 7:30.

**65.** Calcule las medidas, en grados y en radianes, del ángulo que recorre la manecilla de las horas de un reloj en 2 horas.

**66.** Conteste la pregunta del problema 65 del minutero.

**67.** La Tierra gira sobre su eje una vez cada 24 horas. ¿Cuánto tarda en girar un ángulo de ***a)*** $240°$ y ***b)*** $\pi/6$ radianes?

**68.** El planeta Mercurio completa una rotación sobre su eje cada 59 días. ¿Qué ángulo (medido en grados) gira en ***a)*** 1 día terrestre, ***b)*** 1 hora y ***c)*** 1 minuto?



Planeta Mercurio del problema 68

**69.** Calcule la longitud del arco abarcada por un ángulo central de 3 radianes, en un círculo de ***a)*** radio 3 y ***b)*** radio 5.

**70.** Calcule la longitud del arco abarcado por un ángulo central de $30°$ en un círculo de ***a)*** radio 2 y ***b)*** radio 4.

**71.** Calcule el ángulo central $\theta$ en un círculo de radio 5, si $\theta$ subtiende un arco de longitud de 7.5. Exprese $\theta$ en ***a)*** radianes y ***b)*** grados.

**72.** Calcule el ángulo central $\theta$ en un círculo de radio 1 si $\theta$ subtiende un arco de $\pi/3$ de longitud. Exprese $\theta$ en ***a)*** radianes y ***b)*** grados.

**73.** Demuestre que el área $A$ de un sector formado por un ángulo central de $\theta$ radianes en un círculo de radio $r$ es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. [*Pista:* use la propiedad geométrica de proporcionalidad: la relación del área $A$ de un sector circular entre el área total $\pi r^2$ del círculo es igual a la relación del ángulo central $\theta$ entre el ángulo de una revolución completa, $2\pi$].

**74.** ¿Cuál es el área de la banda circular roja de la **FIGURA 8.1.11**, si $\theta$ se expresa ***a)*** en radianes y ***b)*** en grados? [*Pista:* use el resultado del problema 73].

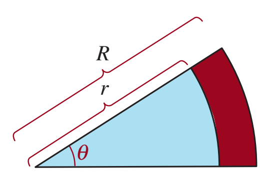



**FIGURA 8.1.11** Banda circular del problema 74

**75. Velocidad angular y lineal** Si dividimos (7) por el tiempo *t*, obtenemos la relación $v = r\omega$, donde $v = s/t$ se llama **velocidad lineal** de un punto en la circunferencia de un círculo y $\omega = \theta/t$ se llama **velocidad angular** del punto. Un satélite de telecomunicaciones se coloca en una órbita geosincrónica circular a 37 786 km por encima de la superficie de la Tierra. El tiempo que tarda el satélite en realizar una revolución completa alrededor de la Tierra es de 23 horas, 56 minutos, 4 segundos y el radio de la Tierra es de 6 378 km. Vea la **FIGURA 8.1.12**.

***a***) ¿Cuál es la velocidad angular del satélite en rad/s?

***b***) ¿Cuál es la velocidad lineal del satélite en km/s?

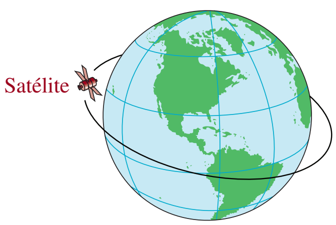



**FIGURA 8.1.12** Satélite del problema 75

**76. Péndulo de reloj** Un péndulo de reloj tiene 1.3 m de longitud, y oscila describiendo un arco de 15 cm. Calcule ***a***) el ángulo central y ***b***) el área del sector que barre el péndulo en una oscilación. [*Pista:* para contestar el inciso ***b***), use el resultado del problema 61].

## Aplicaciones diversas

**77. Navegación marítima** Una milla náutica, o milla marina, se define como la longitud del arco abarcado, en la superficie de la Tierra, por un ángulo central que mide 1 minuto. Si el diámetro de la Tierra es de 7 927 millas terrestres, calcule cuántas millas terrestres hay en una milla náutica.

**78. Circunferencia de la Tierra** Alrededor de 230 a.C., Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra con las siguientes observaciones. A mediodía del día más largo del año, el Sol estaba directamente arriba de Siene (ahora Aswan), mientras que estaba inclinado 7.2° de la vertical en Alejandría. Creía que las dos ciudades estaban en el mismo meridiano, y supuso que los rayos del Sol son paralelos. Así, llegó a la conclusión que el arco de Siene a Alejandría era subtendido por un ángulo central de 7.2°. Vea la **FIGURA 8.1.13**. En esos días, la distancia medida de Siene a Alejandría era de 5 000 estadios. Si un estadio equivale a 559 pies, calcule la circunferencia de la Tierra en ***a***) estadios y ***b***) millas. Demuestre que los datos de Eratóstenes llegan a un resultado dentro de 7% del valor correcto, si el diámetro de la Tierra, con aproximación de cientos de millas, es de 7 900 millas.

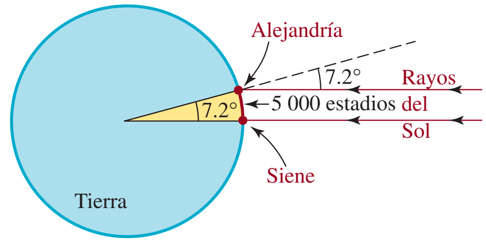



**FIGURA 8.1.13** La Tierra del problema 78

**79. Movimiento circular de un yoyo** Un yoyo se hace girar en torno a un círculo en el extremo de su cordón de 100 cm. ***a***) Si hace 6 revoluciones en 4 segundos, calcule su rapidez de giro (es la magnitud de su **velocidad angular**), en radianes por segundo. ***b***) Calcule la rapidez lineal (es la magnitud de su **velocidad lineal**) a la que viaja el yoyo, en centímetros por segundo.

Yoyo de los problemas 79 y 80

**80. Más yoyos** Si hay un nudo en el cordón del yoyo del problema 68, a 40 cm del yoyo, calcule ***a***) la rapidez angular del nudo y ***b***) la rapidez lineal.

**81. Movimiento circular de un neumático** Si un automóvil con neumáticos de 26 pulgadas de diámetro viaja a 55 millas por hora, calcule ***a***) la cantidad de revoluciones por minuto de sus neumáticos y ***b***) la rapidez angular de los neumáticos, en radianes por minuto.

**82. Diámetro de la Luna** La distancia promedio de la Tierra a la Luna según NASA es de 238 855 millas. Si el ángulo subtendido por la Luna a los ojos de un observador en la Tierra es de 0.52°, ¿cuánto mide aproximadamente el diámetro de la Luna? La **FIGURA 8.1.14** no es a escala.

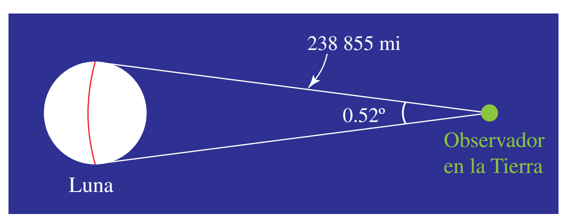



**FIGURA 8.1.14** El arco rojo representa el diámetro aproximado de la Luna

## 8.2 Trigonometría del triángulo rectángulo

**Introducción** La palabra *trigonometría* (del griego *trigonon*, triángulo, y *metria*, medición) se refiere a la medición de triángulos. En la sección 4.2 se definieron las funciones trigonométricas mediante coordenadas de puntos en el círculo unitario, y por medio de radianes se pudieron definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. En esta sección demostraremos que las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo tienen una definición equivalente en función de las longitudes de los lados del triángulo.

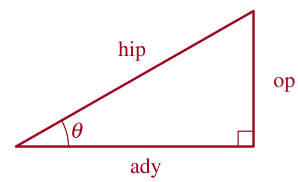



**FIGURA 8.2.1** Definición de las funciones trigonométricas de $\theta$

**Terminología** En la **FIGURA 8.2.1** se ha trazado un triángulo rectángulo, y sus lados se identifican con $a$, $b$ y $c$ (que indican sus longitudes respectivas), y uno de los ángulos agudos representado por $\theta$. Por el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**; los otros lados son los **catetos** del triángulo. Los catetos indicados con $a$ y $b$ son, respectivamente, el cateto **adyacente** al ángulo $\theta$ y el cateto **opuesto** al ángulo $\theta$. También usaremos las abreviaturas **hip**, **ady** y **op** para representar las longitudes de esos lados.

**Definición 8.2.1 Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo $\theta$ en un triángulo rectángulo son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \\ \tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \\ \sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}}. \end{aligned} \tag{1}$$

**Dominios** El dominio de cada una de estas funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. En la sección 8.4 extenderemos estos dominios para incluir otros ángulos, aparte de los agudos. Luego, en el capítulo 9, veremos cómo se definen las funciones trigonométricas con dominios formados por números reales, en lugar de ángulos.

Los valores de las funciones trigonométricas dependen sólo del tamaño del ángulo $\theta$, y no del tamaño del triángulo rectángulo. Para entender esto, considere los dos triángulos rectángulos que se muestran en la **FIGURA 8.2.2**. Como los triángulos rectángulos tienen el mismo ángulo agudo $\theta$ son semejantes y, por tanto, las razones de los ángulos correspondientes son iguales. Por ejemplo, por el triángulo rojo de la figura 8.2.2*a*) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b}{c}, \text{ op} = \text{cateto opuesto, hip} = \text{hipotenusa}$$

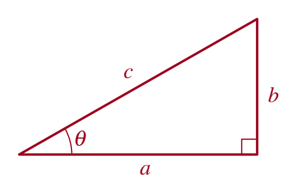
mientras que en el triángulo azul más pequeño de la figura 8.2.2*b*) tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{b'}{c'}.$$

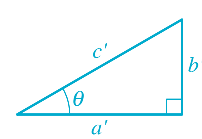
Sin embargo, como el triángulo rojo es semejante al triángulo azul, debemos tener que

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}.$$

En otras palabras, obtenemos el mismo valor de sen $\theta$ independientemente del triángulo rectángulo que utilicemos para calcularlo. Se puede decir lo mismo de las restantes cinco funciones trigonométricas.




*a*)




*b*)

**FIGURA 8.2.2** Triángulos semejantes

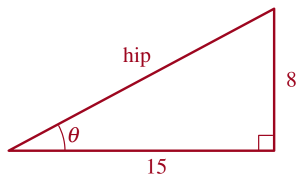



**FIGURA 8.2.3** Triángulo rectángulo del ejemplo 1

## EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Determinar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ del triángulo rectángulo de la **FIGURA 8.2.3**.

**Solución** En la figura 8.2.3 se ve que el cateto opuesto a $\theta$ tiene 8 de longitud, y que el cateto adyacente tiene 15 de longitud. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \qquad \text{y así} \qquad c = \sqrt{289} = 17.$$

Entonces, de acuerdo con (1), los valores de las seis funciones trigonométricas son:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{8}{17}, & \cos\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{15}{17},\\
\tan\theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{8}{15}, & \cot\theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{15}{8},\\
\sec\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{17}{15}, & \csc\theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{17}{8}.
\end{aligned}$$

≡

### Identidades por cociente y recíprocas

Existen muchas relaciones importantes entre las funciones trigonométricas. Las básicas se presentan a continuación y se denominan **identidades fundamentales**, debe memorizarlas.

**Identidades por cociente:**

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{2}$$

**Identidades recíprocas:**

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}. \tag{3}$$

Las identidades (2) y (3) se obtienen de la definición 8.2.1. Por ejemplo, la primera de las identidades por cociente se comprueba como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{op}/\text{hip}}{\text{ady}/\text{hip}} = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \tan\theta.$$

Las demás pueden comprobarse del mismo modo. Con estas identidades podemos obtener los valores de las seis funciones trigonométricas una vez que conocemos los valores de sen $\theta$ y cos $\theta$.

## EJEMPLO 2 Usar (2) y (3)

Dado que sen $\theta = \frac{4}{5}$ y cos $\theta = \frac{3}{5}$, encuentre los valores de las restantes cuatro funciones trigonométricas.

**Solución** Con base en las identidades fundamentales, tenemos

$$\left.\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}\right\} \leftarrow \text{de (2)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\\
\csc\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\\
\cot\theta &= \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}\right\} \leftarrow \text{de (3)}$$

Aunque usamos la identidad recíproca de (3) para calcular cot $\theta$, también podríamos haber usado la identidad por cociente de (2) para calcular cot $\theta$. ≡

## EJEMPLO 3 Usar un triángulo rectángulo

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y $\tan\theta = 2\sqrt{2}$, calcule sen $\theta$.

**Solución** Para obtener sen $\theta$, multiplicamos la primera identidad de (2) por cos $\theta$:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ ≡

El siguiente ejemplo ilustra que si conocemos el valor de sólo una función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos obtener los valores de las otras cinco funciones si dibujamos el triángulo apropiado.

## EJEMPLO 4 Uso del triángulo

Si $\theta$ es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, determinar los valores de las demás funciones trigonométricas de $\theta$.

**Solución** Se traza un esquema de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\theta$ que satisfaga $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{7}$, haciendo que op $= 2$ e hip $= 7$, como se ve en la **FIGURA 8.2.4**. Según el teorema de Pitágoras,

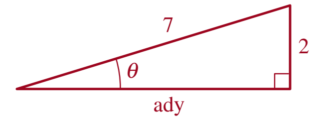



**FIGURA 8.2.4** Triángulo rectángulo del ejemplo 4

$$2^2 + (\text{ady})^2 = 7^2 \quad \text{y entonces} \quad (\text{ady})^2 = 7^2 - 2^2 = 45.$$

Por tanto, $$\text{ady} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes se obtienen con las definiciones de (1):

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15},$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{7}{2}.$$ ≡

**Cofunciones** El uso de la terminología seno y coseno, tangente y cotagente, y secante y cosecante es resultado de la siguiente observación. Como se muestra en la **FIGURA 8.2.5**, si los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo $ABC$ se denominan $\alpha$ y $\beta$ y $a$ es la longitud del lado opuesto a $\alpha$, $b$ es la longitud del lado opuesto a $\beta$, y $c$ es la longitud del lado opuesto al ángulo recto, entonces, por la definición 8.2.1,

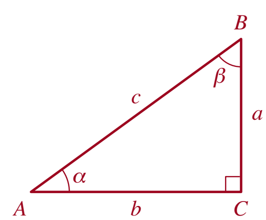



**FIGURA 8.2.5** Ángulos agudos $\alpha$ y $\beta$ de un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\beta,$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \sec\beta.$$

Debido a que la suma de los ángulos de todo triángulo es 180° (o $\pi$ radianes), los ángulos agudos $\alpha$ y $\beta$ de un triángulo rectángulo son complementarios. Por tanto, el coseno de un ángulo agudo es igual al seno del ángulo complementario, la cotangente de un ángulo agudo es igual a la tangente del ángulo complementario, la cosecante de un ángulo agudo es igual a la secante del ángulo complementario, y viceversa. Por esta razón decimos que seno y coseno, tangente y cotangente y secante y cosecante son **cofunciones** una de otra. Podemos resumir esta exposición en una sola oración:

*Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales.* (4)

**Identidades de cofunción** Si $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos agudos del triángulo de la figura 8.2.5, entonces

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Debido a que $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$, obtenemos

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Esta última expresión es una de las seis identidades por cofunción.

**Identidades de cofunción:**

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \cot\theta &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \csc\theta &= \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \operatorname{sen}\theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \tan\theta &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & \sec\theta &= \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned} \tag{5}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) & \cot\theta &= \tan(90^\circ - \theta) & \csc\theta &= \sec(90^\circ - \theta) \\ \operatorname{sen}\theta &= \cos(90^\circ - \theta) & \tan\theta &= \cot(90^\circ - \theta) & \sec\theta &= \csc(90^\circ - \theta). \end{aligned} \tag{6}$$

En (5) y (6) se sobreentiende que $\theta$ se mide en radianes y grados, respectivamente.

## EJEMPLO 5 Usar (5) y (6)

Por (5):

ángulos complementarios

***a***) $\cot\dfrac{\pi}{6} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3}$

***b***) $\cos\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}.$

Por (6):

***c***) $\csc 27^\circ = \sec(90 - 27^\circ) \sec 63^\circ$

***d***) $\cot 15^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \tan 75^\circ.$ ≡

**Identidades pitagóricas** Si sólo conocemos el valor de *una* función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos calcular los valores de las otras cinco funciones sin utilizar las relaciones de (1). Debido a que el triángulo de la figura 8.2.1 es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras relaciona las longitudes de los lados del triángulo mediante

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si dividimos este último resultado por $c^2$, obtenemos $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$ o

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \tag{7}$$

Asimismo, si dividimos $a^2 + b^2 = c^2$ por $a^2$ y $b^2$, obtenemos, a su vez,

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \tag{8}$$

y

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2. \tag{9}$$

El uso de la definición apropiada de (1) en los resultados de (7), (8) y (9) produce otro conjunto de identidades importantes.

**Identidades pitagóricas:**

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{10}$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{11}$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{12}$$

En las fórmulas (10), (11) y (12), el cuadrado de las funciones trigonométricas se escribe $(\operatorname{sen}\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta$, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$, etcétera.

### EJEMPLO 6 Usar (11)

Si $\theta$ es un ángulo agudo y $\tan\theta = \sqrt{5}$, calcule el valor de $\cos\theta$.

**Solución** Hay varias formas de resolver este problema. Una de ellas es usar la identidad pitagórica (11):

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 = (\sqrt{5})^2 + 1 = 5 + 1 = 6$$

y, por tanto, $\sec\theta = \sqrt{6}$. Debido a que $\sec\theta = 1/\cos\theta$, tenemos que $\cos\theta = 1/\sec\theta$. Por tanto, $\cos\theta = 1/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$. ≡

## *Notas del aula*

Como veremos en la sección 9.4, *todas* las identidades presentadas en esta sección son válidas con cualquier ángulo $\theta$ (y no sólo con ángulos agudos).

## 8.2 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 a 10 determine los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ del triángulo.

**1.**

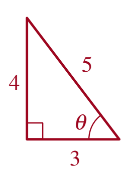



**FIGURA 8.2.6** Triángulo del problema 1

**2.**

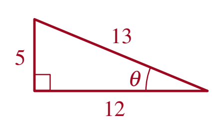



**FIGURA 8.2.7** Triángulo del problema 2

**3.**

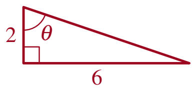



**FIGURA 8.2.8** Triángulo del problema 3

**4.**

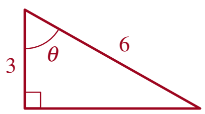



**FIGURA 8.2.9** Triángulo del problema 4

**5.**

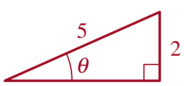



**FIGURA 8.2.10** Triángulo del problema 5

**6.**

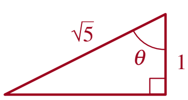



**FIGURA 8.2.11** Triángulo del problema 6

**7.**

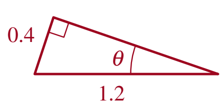



**FIGURA 8.2.12** Triángulo del problema 7

**8.**

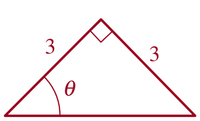



**FIGURA 8.2.13** Triángulo del problema 8

**9.**

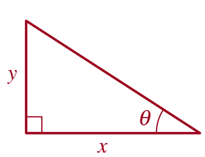



**FIGURA 8.2.14** Triángulo el problema 9

**10.**

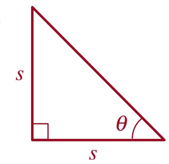



**FIGURA 8.2.15** Triángulo del problema 10

En los problemas 11 a 20, use las identidades presentadas en esta sección para obtener los valores de las cuatro funciones trigonométricas restantes del ángulo agudo $\theta$.

**11.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}, \ \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

**12.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \ \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

**13.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{7}, \ \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

**14.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}, \ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

**15.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{65}}, \ \tan\theta = \dfrac{1}{8}$

**16.** $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{29}}, \ \cot\theta = \dfrac{5}{2}$

**17.** $\csc\theta = \dfrac{5}{3}, \ \sec\theta = \dfrac{5}{4}$

**18.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{50}}, \ \cot\theta = 7$

**19.** $\cos\theta = \dfrac{1}{3}, \ \csc\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

**20.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{50}}, \ \cot\theta = 7$

En los problemas 21 a 28, dibuje el triángulo apropiado para obtener el valor de las funciones trigonométricas restantes.

**21.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{12}{13}$

**22.** $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

**23.** $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

**24.** $\csc\theta = \sqrt{10}$

**25.** $\tan\theta = \dfrac{2}{5}$

**26.** $\cot\theta = \dfrac{1}{7}$

**27.** $\sec\theta = \dfrac{7}{3}$

**28.** $\tan\theta = 3$

**29.** Si $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, obtenga el valor exacto de sen 15°.

**30.** Si $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, obtenga el valor exacto de sec 75°.

**31.** Si $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, obtenga el valor exacto de $\cot(3\pi/8)$.

**32.** Si $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$, obtenga el valor exacto de $\tan(3\pi/8)$.

En los problemas 33 a 46, use las identidades de esta sección para obtener el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use calculadora.

**33.** $3\,\text{sen}^2\dfrac{\pi}{12} + 3\cos^2\dfrac{\pi}{12}$

**34.** $\text{sen}^2 35° + \text{sen}^2 55°$

**35.** $1 + \cos^2 18° + \text{sen}^2 18°$

**36.** $1 + \tan^2 33° - \sec^2 33°$

**37.** $\tan^2\dfrac{\pi}{8} - \sec^2\dfrac{\pi}{8}$

**38.** $-4\csc^2 13° + 4\cot^2 13°$

**39.** $\dfrac{\text{sen}\,10°}{\text{sen}\,80°} - \dfrac{\text{sen}\,10°}{\cos 10°}$

**40.** $\sec 20° - \csc 70°$

**41.** $5\cot 41°\cot 49°$

**42.** $\frac{1}{2}\cos 11°\sec 11°$

**43.** $\text{sen}\,28°\cot 28°\csc 62°$

**44.** $10\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\cot\dfrac{\pi}{3}\sec\dfrac{\pi}{3}$

**45.** $\text{sen}\,10°\cos 80° + \cos 10°\,\text{sen}\,80°$

**46.** $\tan 30°\cot 60° - \sec 30°\csc 30°$

En los problemas 47 a 54, dado que $\cos 30° = \sqrt{3}/2$, use las identidades de esta sección para obtener el valor exacto de la función trigonométrica presentada. No use calculadora.

**47.** sen 30°

**48.** cos 60°

**49.** tan 60°

**50.** cot 30°

**51.** sec 30°

**52.** csc 30°

**53.** cos 30° tan 30°

**54.** tan 30° + cot 60°

## 8.3 Funciones trigonométricas de ángulos especiales

**Introducción** Los ángulos de 30° ($\pi/6$ radianes), 45° ($\pi/4$ radianes) y 60° ($\pi/3$ radianes) se consideran especiales porque se presentan muy a menudo en el estudio de trigonometría y su uso en cálculo. Por tanto, es muy conveniente que aprenda los *valores exactos* del seno y coseno de cada uno de estos ángulos. En la siguiente explicación obtenemos estos valores por medio de algunos resultados de la geometría euclidiana.

**Valores de sen 45° y cos 45°** Para obtener los valores de las funciones seno y coseno de un ángulo de 45°, consideramos el triángulo rectángulo isósceles con dos lados iguales de longitud 1 que se ilustra en la **FIGURA 8.3.1**. Por la geometría euclidiana sabemos que los ángulos agudos de este triángulo son iguales; por tanto, cada ángulo agudo mide 45°. Para obtener la longitud de la hipotenusa, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(\text{hip})^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2 \qquad \text{da por resultado} \qquad \text{hip} = \sqrt{2}.$$

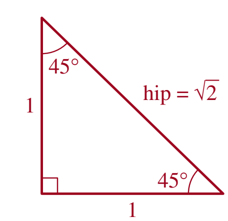



**FIGURA 8.3.1** Triángulo rectángulo isósceles

Por consiguiente, por (1) de la sección 8.2 obtenemos

$$\text{sen}\,45° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

y

$$\cos 45° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

**Valores de sen 30° y cos 30°** Para obtener los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, consideramos el triángulo equilátero *AOB* con lados de longitud 2 que se ilustra en la **FIGURA 8.3.2*a*)**. Por la geometría euclidiana sabemos que los tres ángulos de un triángulo equilátero miden cada uno 60°. Como se muestra en la **FIGURA 8.3.2*b*)**, si dividimos en dos el ángulo en *O*, entonces *CO* es la bisectriz perpendicular de *AB*. Se desprende que

$$\angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle AOB = \tfrac{1}{2}(60°) = 30°,$$
$$\overline{AC} = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB} = \tfrac{1}{2}(2) = 1 \qquad \text{y} \qquad \angle ACO = 90°.$$

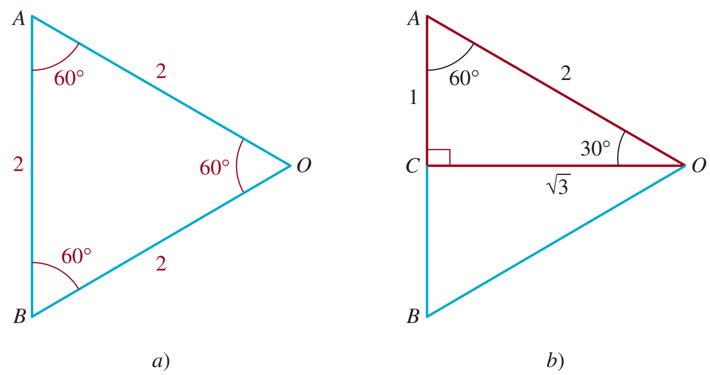



**FIGURA 8.3.2** Triángulo equilátero en *a*); dos triángulos rectángulos congruentes en *b*)

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo rojo *ACO* de la figura 8.3.2*b*), obtenemos $(\overline{CO})^2 + 1^2 = 2^2$. Despejamos $\overline{CO}$ y obtenemos $\overline{CO} = \sqrt{3}$. Por tanto, del triángulo rectángulo *ACO* y (1) de la sección 8.2, obtenemos los siguientes valores:

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{1}{2} \tag{3}$$
$$\cos 30° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{4}$$

**Valores de sen 60° y cos 60°** Ahora usamos el ángulo de 60° del triángulo rectángulo rojo *ACO* de la figura 8.3.2*b*) e identificamos op $= \sqrt{3}$, ady $= 1$ e hip $= 2$.

Por tanto,

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5}$$
$$\cos 60° = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

**Cofunciones** No tuvimos que usar un triángulo rectángulo para obtener los valores en (5) y (6). Recuerde que en la sección 8.2 demostramos que las cofunciones de ángulos complementarios son iguales. Así, (5) y (6) se desprenden de inmediato de los resultados de (3) y (4):

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}.$$

## EJEMPLO 1 Valores de las otras funciones trigonométricas

Obtenga los valores de tan ($\pi/6$), cot ($\pi/6$), sec ($\pi/6$) y csc ($\pi/6$).

**Solución** El ángulo de 30° es equivalente a $\pi/6$ radianes. Usando las identidades por cociente y recíproca de la sección 8.2 junto con los resultados de (3) y (4), obtenemos

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{6} &= \frac{\operatorname{sen}(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\\
\cot\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\tan(\pi/6)} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}\\
\sec\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
\csc\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/6)} = \frac{1}{1/2} = 2.
\end{aligned}$$

≡

Dejaremos que usted mismo obtenga los valores de tan $\theta$, cot $\theta$, sec $\theta$ y csc $\theta$ de $\theta = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$ como ejercicio. Véanse los problemas 1 y 2 de los ejercicios 8.3.

La tabla 8.3.1 resume los valores de las funciones seno, coseno y tangente que acabamos de determinar para los ángulos especiales de 30°, 45° y 60°. Como mencionamos en la introducción a esta sección, estos valores de funciones se usan con tanta frecuencia que creemos que debe memorizarlos. Conocer estos valores y las identidades fundamentales que estudiamos antes le permitirá determinar cualquiera de las funciones trigonométricas de estos ángulos especiales.

**TABLA 8.3.1**

| $\theta$ (grados) | $\theta$ (radianes) | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

## EJEMPLO 2 Obtención de los valores exactos

Obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada.

***a***) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$ ***b***) $\cos 30° \tan 60°$ ***c***) $2 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 6\cos\frac{\pi}{6}$

**Solución** En cada caso usaremos la información de la tabla 8.3.1.

***a***) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

***b***) $\cos 30° \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{2}$

***c***) $2 + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 6\cos\frac{\pi}{6} = 2 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$ ≡

**Uso de calculadora** Se pueden obtener aproximaciones de los valores de las funciones trigonométricas con una calculadora científica. Sin embargo, antes de usar una calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas de ángulos medidos en *radianes,* es necesario seleccionar el modo de radianes de la calculadora. Si los ángulos se miden en grados, entonces hay que seleccionar el modo de grados antes de realizar los cálculos. Además, si los ángulos se dan en grados, minutos y segundos, antes deben convertirse a decimales. Las calculadoras científicas tienen teclas con las leyendas sin, cos y tan para calcular los valores de estas funciones. Para obtener los valores de $\boxed{\text{csc}}$, $\boxed{\text{sec}}$ o $\boxed{\text{cot}}$, se usan las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$ con la tecla de recíproco $\boxed{1/x}$. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

## EJEMPLO 3 Usar una calculadora

Use una calculadora para aproximar cada uno de lo siguiente:

***a***) sen 45°
***b***) cos 8°15′
***c***) sec 0.23
***d***) $\cot \dfrac{\pi}{7}$

**Solución** ***a***) En primer lugar, debemos asegurarnos de que la calculadora esté funcionando en modo de grados. A continuación, introducimos 45 y usamos la tecla $\boxed{\text{sin}}$ para obtener

$$\text{sen } 45° \approx 0.7071068,$$

que es una aproximación con siete decimales del valor exacto $\sqrt{2}/2$ dado en (1).

***b***) Puesto que el ángulo está dado en grados y minutos, primero es necesario convertirlo a forma decimal: $8°15' = 8° + (\frac{15}{60})° = 8.25°$. Ahora, con la calculadora en *modo de grados,* introducimos 8.25 y usamos la tecla $\boxed{\text{cos}}$ para obtener

$$\cos 8°15' = \cos 8.25° \approx 0.9896514$$

***c***) Como no se indican los grados, reconocemos que este ángulo está medido en radianes. Para evaluar sec 0.23, usaremos la identidad fundamental $\sec \theta = 1/\cos \theta$. Con la calculadora en modo de radianes, introducimos 0.23, usamos la tecla $\boxed{\text{cos}}$ y luego oprimimos la tecla $\boxed{1/x}$ para sacar el recíproco del resultado. Así, tenemos

$$\sec 0.23 = \frac{1}{\cos 0.23} \approx 1.0270458.$$

***d***) Observamos que este ángulo está medido en radianes y configuramos la calculadora en consecuencia. Primero introducimos $\pi$, dividimos por 7, usamos la tecla $\boxed{\text{tan}}$ y luego la tecla $\boxed{1/x}$ para obtener

$$\cot \frac{\pi}{7} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{7}} \approx 2.0765214. \qquad \equiv$$

## 8.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

En los problemas 1 y 2, use los resultados de esta sección para obtener los valores de tan $\theta$, cot $\theta$, sec $\theta$ y csc $\theta$ del ángulo dado.

**1.** 45°

**2.** $\pi/3$

En los problemas 3 a 22, obtenga el valor exacto de la expresión trigonométrica dada. No use la calculadora.

**3.** $\cos^2 \dfrac{\pi}{3}$

**4.** $\tan^2 \dfrac{\pi}{6}$

**5.** $\sec 45° \csc 45°$

**6.** $\text{sen}\, 60° \cos 30°$

**7.** $\text{sen}\, \dfrac{\pi}{4} \cot \dfrac{\pi}{4}$

**8.** $6 \sec \dfrac{\pi}{3} \csc \dfrac{\pi}{6}$

**9.** $9 \sec 45° \csc 45°$

**10.** $\tan 60° \cot 30°$

**11.** $\text{sen}\, \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{3} \text{sen}\, \dfrac{\pi}{4}$

**12.** $\cos \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{6} - \text{sen}\, \dfrac{\pi}{3} \text{sen}\, \dfrac{\pi}{6}$

**13.** $6 \tan 30° + 7 \tan 60°$

**14.** $3\, \text{sen}\, \dfrac{\pi}{4} - 5 \cos \dfrac{\pi}{4}$

**15.** $\tan 45° - \cot 45°$

**16.** $\sec^2 \dfrac{\pi}{4} + 4 \csc^2 \dfrac{\pi}{3}$

**17.** $\dfrac{8\, \text{sen}\, (\pi/4)}{\sec\, (\pi/3)}$

**18.** $\dfrac{2 - \sqrt{2}\, \text{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)}$

**19.** $\text{sen}^2 30° + \cos^2 45°$

**20.** $2 + \cot^2 30° - 10 \csc^2 30°$

**21.** $\dfrac{\tan(\pi/4) - \tan(\pi/6)}{1 + \tan(\pi/4)\tan(\pi/6)}$

**22.** $\dfrac{\tan(\pi/3) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)}$

En los problemas 23 a 32, use una calculadora para obtener los valores aproximados de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado. Redondee su respuesta a cuatro posiciones decimales.

**23.** $17°$

**24.** $82°$

**25.** $14.3°$

**26.** $34.75°$

**27.** $71°30'15''$

**28.** $46°15'8''$

**29.** $\dfrac{\pi}{5}$

**30.** $\dfrac{\pi}{10}$

**31.** $0.6725$

**32.** $1.24$

### Para la discusión

**33.** Sin usar la calculadora, obtenga el valor exacto del producto

$$\tan \frac{\pi}{180} \cdot \tan \frac{2\pi}{180} \cdot \tan \frac{3\pi}{180} \cdots \tan \frac{89\pi}{180}.$$

## 8.4 Funciones trigonométricas de ángulos generales

**Introducción** Hasta el momento sólo hemos definido las funciones trigonométricas de los ángulos agudos. Sin embargo, muchas aplicaciones de trigonometría incluyen ángulos que no son agudos. En consecuencia, es necesario ampliar la definición de las seis funciones trigonométricas en (1) de la sección 8.2 a todos los ángulos generales. Como es natural, necesitamos que la definición ampliada coincida con la definición anterior siempre que el ángulo sea agudo. Para lograrlo, procedemos de la siguiente manera.

Sea $\theta$ un ángulo agudo en posición estándar y seleccionemos el punto $P(x, y)$ en el lado terminal de $\theta$. Si $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, en la **FIGURA 8.4.1** vemos que $x$, $y$ y $r$ representan la longitud de los lados de un triángulo rectángulo. Como $y = \text{op}$, $x = \text{ady}$ y $r = \text{hip}$, por la definición 8.2.1 tenemos que

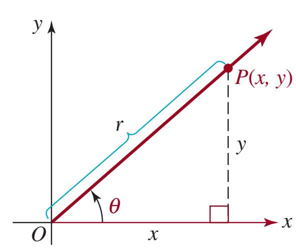


**FIGURA 8.4.1** Un ángulo agudo

$$\text{sen}\, \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

Las expresiones de (1) nos proporcionan un modelo en el que basaremos nuestra definición ampliada para *cualquier* ángulo $\theta$ en posición estándar, como los que se ilustran en la **FIGURA 8.4.2**.

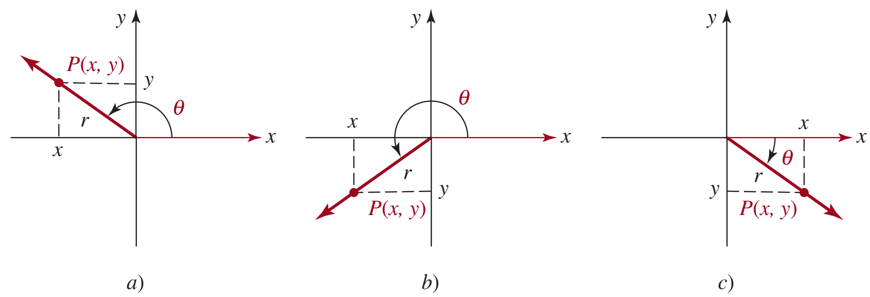



**FIGURA 8.4.2** Ángulos que no son agudos

Ahora tenemos la siguiente definición de las **funciones trigonométricas de un ángulo en general**.

**Definición 8.4.1 Funciones trigonométricas**

Sea $\theta$ cualquier ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ cualquier punto, excepto (0, 0) en el lado terminal de $\theta$. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre (0, 0) y $P(x, y)$, las funciones trigonométricas se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r} & \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} & \cot\theta &= \frac{x}{y} \\ \sec\theta &= \frac{r}{x} & \csc\theta &= \frac{r}{y} \end{aligned} \tag{2}$$

siempre que ningún denominador sea 0.

Se puede demostrar, usando triángulos semejantes, que los valores de las seis funciones trigonométricas dependen sólo del ángulo $\theta$ y no del punto $P(x, y)$ que se seleccione en el lado terminal de $\theta$. La justificación de esta aseveración es como la que se presentó en el caso de los ángulos agudos en la página 361.

**■ Dominios** Una función trigonométrica definida en (2) será indefinida si su denominador es cero. Puesto que $P(x, y) \neq (0, 0)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ nunca es cero. Por tanto, los dominios de las funciones seno y coseno constan en su totalidad de ángulos $\theta$. Sin embargo, las funciones tangente y secante serán indefinidas si el lado terminal de $\theta$ está situado en el eje *y,* porque entonces $x = 0$. Por tanto, los dominios de $\tan\theta$ y $\sec\theta$ constan en su totalidad de ángulos $\theta$, *excepto* los que miden en radianes $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, y así sucesivamente. Usando notación de conjuntos y con base en el hecho de que un entero impar se puede escribir como $2n + 1$, $n$ un entero, los dominios de las funciones tangente y secante son:

Los ángulos son múltiplos impares de $\pi/2$.

$$\{\theta \mid \theta \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

o

$$\{\theta \mid \theta \neq (2n + 1)90°, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Las funciones cotangente y cosecante no están definidas para ángulos cuyos lados terminales se sitúan sobre el eje $x$, porque entonces $y = 0$. Por consiguiente, los dominios de $\cot\theta$ y $\csc\theta$ constan en su totalidad de ángulos $\theta$, *excepto* los que miden en radianes $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$, y así sucesivamente; es decir, $\{\theta \mid \theta \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ o $\{\theta \mid \theta \neq 180°n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Los ángulos son múltiplos enteros de $\pi$.

Puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se desprende que $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$, o lo que es lo mismo, $|x/r| \leq 1$ y $|y/r| \leq 1$. Por tanto, como antes,

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |\cos\theta| \leq 1 \tag{3}$$

Asimismo, como $|r/x| \geq 1$ y $|r/y| \geq 1$, tenemos que

$$|\csc\theta\,|\,1 \geq 1 \qquad \text{y} \qquad |\sec\theta| \geq 1 \tag{4}$$

Las desigualdades en (3) y (4) son válidas para cada $\theta$ en el dominio de cada una de estas funciones.

## EJEMPLO 1 Valores de las funciones trigonométricas

Obtenga los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ si $\theta$ está en posición estándar y el lado terminal de $\theta$ contiene el punto $P(-3, 1)$.

**Solución** En la **FIGURA 8.4.3** se representa gráficamente el lado terminal del ángulo obtuso $\theta$. Con las identificaciones $x = -3$, $y = 1$, y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10},$$

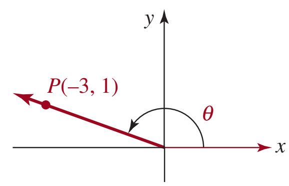



**FIGURA 8.4.3** Ángulo $\theta$ del ejemplo 1

tenemos por (2) que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \qquad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$$
$$\tan\theta = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{-3}{1} = -3,$$
$$\sec\theta = \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}.$$

≡

## EJEMPLO 2 Valores de las funciones trigonométricas

Obtenga los valores de las seis funciones trigonométricas de $\theta$ si $\theta = -\pi/2$.

**Solución** Primero colocamos $\theta$ en posición estándar, como se muestra en la **FIGURA 8.4.4**. De acuerdo con la definición 8.4.1, podemos elegir *cualquier* punto $P(x, y)$ en el lado terminal de $\theta$. Por conveniencia, vamos a seleccionar $P(0, -1)$ para que $x = 0$, $y = -1$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1} = -1, \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0,$$
$$\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{-1} = 0, \qquad \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-1} = -1.$$

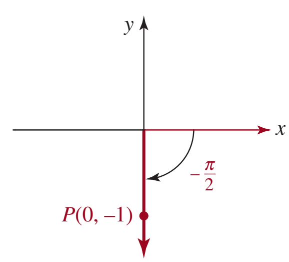



**FIGURA 8.4.4** Ángulo $\theta$ del ejemplo 2

Sin embargo, las expresiones $\tan\theta = y/x$ y $\sec\theta = r/x$ son indefinidas para $\theta = -\pi/2$, puesto que $x = 0$. ≡

**Signos algebraicos** Según el cuadrante en el que se sitúe el lado terminal de $\theta$, una o las dos coordenadas de $P(x, y)$ puede ser negativa. Puesto que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es *siempre positivo,* cada una de las seis funciones trigonométricas de $\theta$ tiene valores negativos y positivos. Por ejemplo, sen $\theta = y/r$ es positivo si el lado terminal de $\theta$ se sitúa dentro de los cuadrantes I o II (donde $y$ es positivo), y sen $\theta = y/r$ es negativo si el lado terminal de $\theta$ está situado dentro de los cuadrantes III o IV (donde $y$ es negativo). La **FIGURA 8.4.5** resume los signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas definidas en (2). Por conveniencia, si el lado terminal de $\theta$ se sitúa dentro del cuadrante II, nos referiremos a $\theta$ como un ángulo del cuadrante II o diremos que $\theta$ está en el cuadrante II. Emplearemos terminología similar cuando mencionemos ángulos cuyos lados terminales se sitúan dentro de los cuadrantes I, III o IV.

| II | | I | |
|---|---|---|---|
| $\cos\theta < 0$ | sen $\theta > 0$ | $\cos\theta > 0$ | sen $\theta > 0$ |
| $\tan\theta < 0$ | $\cot\theta < 0$ | $\tan\theta > 0$ | $\cot\theta > 0$ |
| $\sec\theta < 0$ | $\csc\theta > 0$ | $\sec\theta > 0$ | $\csc\theta > 0$ |
| $\cos\theta < 0$ | sen $\theta < 0$ | $\cos\theta > 0$ | sen $\theta < 0$ |
| $\tan\theta > 0$ | $\cot\theta > 0$ | $\tan\theta < 0$ | $\cot\theta < 0$ |
| $\sec\theta < 0$ | $\csc\theta < 0$ | $\sec\theta > 0$ | $\csc\theta < 0$ |
| III | | IV | |

**FIGURA 8.4.5** Signos algebraicos de las seis funciones trigonométricas

### EJEMPLO 3 Usar la figura 8.4.5

¿En qué cuadrante está situado el lado terminal de $\theta$ si sen $\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$?

**Solución** En la figura 8.4.5 observamos que la función seno es positiva para los ángulos en los cuadrantes I y II y la función tangente es negativa en los cuadrantes II y IV, por tanto, el lado terminal de $\theta$ debe situarse dentro del cuadrante II. ≡

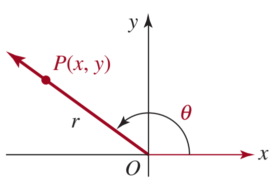



**FIGURA 8.4.6** Un ángulo arbitrario $\theta$

**Identidades pitagóricas, segunda parte** Las identidades recíprocas, por cociente y pitagóricas de los ángulos agudos que se presentaron en la sección 8.2 también son válidas para los ángulos generales. Por ejemplo, para obtener las **identidades pitagóricas**, sea $\theta$ cualquier ángulo en posición estándar. Como se muestra en la **FIGURA 8.4.6**, sea $P(x, y)$ cualquier punto, excepto el origen, en el lado terminal de $\theta$. De nuevo, si $r = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces tenemos $x^2 + y^2 = r^2$. Dividiendo ambos lados de la última ecuación por $r^2$, obtenemos

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Reconociendo que $x/r = \cos\theta$ y $y/r =$ sen $\theta$ obtenemos la identidad pitagórica básica

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos\theta^2 = 1 \tag{5}$$

En (5) seguimos la convención que sen$^2\theta$ se escribe en primer término. Si dividimos ambos lados de (5), a su vez, por $\cos^2\theta$ y sen$^2\theta$, obtenemos

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{6}$$

y

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta. \tag{7}$$

Las fórmulas (5), (6) y (7) son idénticas a (10), (11) y (12) de la sección 8.2. Sin embargo, a diferencia de estas últimas, las funciones trigonométricas de (5), (6) y (7) son

- válidas para todos los ángulos cuyas funciones están definidas, y
- los valores de las funciones pueden tener valores negativos.

Retomaremos las identidades pitagóricas (en el capítulo 9) cuando demostremos que es posible definir las funciones trigonométricas de números reales, en vez de ángulos.

## EJEMPLO 4 Usar (5)

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y que $\theta$ es un ángulo del cuadrante IV, obtenga los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de $\theta$.

**Solución** Sustituimos $\cos\theta = \frac{1}{3}$ en (5) y obtenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Puesto que el lado terminal de $\theta$ está en el cuadrante IV, $\operatorname{sen}\theta$ es *negativo*. Por tanto, debemos seleccionar la raíz cuadrada negativa de $\frac{8}{9}$:

Vea la figura 8.4.5.

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ahora, usando

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},$$

encontramos que los valores de las cuatro funciones restantes son

$$\tan\theta = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}, \quad \cot\theta = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{1/3} = 3, \quad \csc\theta = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

≡

## EJEMPLO 5 Usar (6)

Dado que $\tan\theta = -2$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, obtenga los valores exactos de las cinco funciones trigonométricas restantes de $\theta$.

**Solución** Si $\tan\theta = -2$ en la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, tenemos que

$$\sec^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5.$$

Puesto que $\tan\theta$ es negativo en los cuadrantes II y IV y $\operatorname{sen}\theta$ es positivo en los cuadrantes I y II, el lado terminal de $\theta$ debe estar situado en el cuadrante II. Por tanto, deducimos que

$$\sec\theta = -\sqrt{5}.$$

De $\sec\theta = 1/\cos\theta$, se desprende que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Usando $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\tan\theta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(-2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Entonces, $$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y $$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

≡

En la sección 8.3 obtuvimos los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$, respectivamente, medidos en radianes). Estos valores se pueden usar para determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos que no son agudos por medio de un **ángulo de referencia**.

**Definición 8.4.2 Ángulo de referencia**

Sea $\theta$ un ángulo en posición estándar tal que su lado terminal no se sitúa sobre un eje de coordenadas. El **ángulo de referencia** $\theta'$ para $\theta$ se define como el ángulo agudo formado por el lado terminal de $\theta$ y el eje $x$.

La **FIGURA 8.4.7** ilustra esta definición para los ángulos que tienen lados terminales en cada uno de los cuatro cuadrantes.

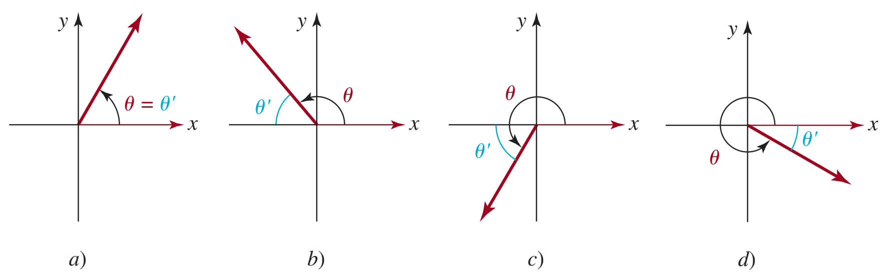



**FIGURA 8.4.7** Un ángulo $\theta$ (rojo) y su ángulo de referencia $\theta'$ (azul)

## EJEMPLO 6 Ángulos de referencia

Obtenga el ángulo de referencia de cada ángulo $\theta$.

***a***) $\theta = 40°$ ***b***) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ***c***) $\theta = 210°$ ***d***) $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

**Solución** ***a***) En la **FIGURA 8.4.8*a*)** observamos que $\theta' = 40°$.

***b***) Por la figura 8.4.8*b*), $\theta' = \pi - \theta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$.

***c***) Por la figura 8.4.8*c*), $\theta' = \theta - 180° = 210° - 180° = 30°$.

***d***) Puesto que $\theta = -9\pi/4$ es coterminal con

$$-\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{\pi}{4},$$

tenemos que $\theta' = \pi/4$ [figura 8.4.8*d*)].

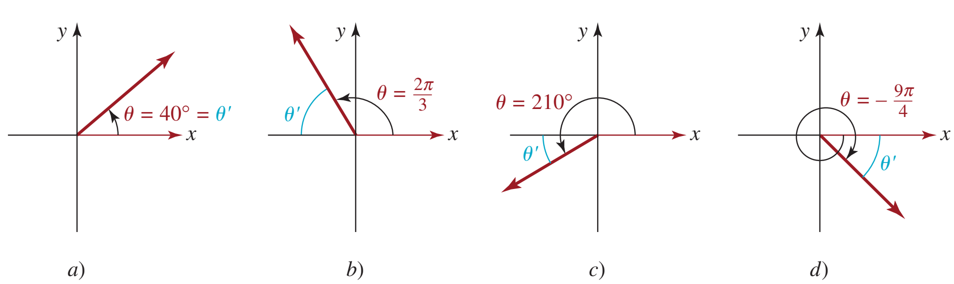



**FIGURA 8.4.8** Ángulos de referencia del ejemplo 6

**Propiedad de los ángulos de referencia** La utilidad de los ángulos de referencia en la evaluación de las funciones trigonométricas es resultado de la siguiente propiedad:

*El valor absoluto de toda función trigonométrica de un ángulo $\theta$ es igual al valor de esa función en el ángulo de referencia $\theta'$.*

Por ejemplo, $|\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}\theta'$, $|\cos\theta| = \cos\theta'$, y así sucesivamente.

Comprobaremos la propiedad anterior con la función seno. Si el lado terminal de $\theta$ está situado dentro del cuadrante I, entonces $\theta = \theta'$ y $\operatorname{sen}\theta$ es positivo, por tanto

$$\operatorname{sen}\theta' = \operatorname{sen}\theta = |\operatorname{sen}\theta|.$$

En la **FIGURA 8.4.9** vemos que si $\theta$ es un ángulo de los cuadrantes II, III o IV, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta' = \frac{|y|}{r} = \left|\frac{y}{r}\right| = |\operatorname{sen}\theta|,$$

donde $P(x, y)$ es cualquier punto en el lado terminal de $\theta$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

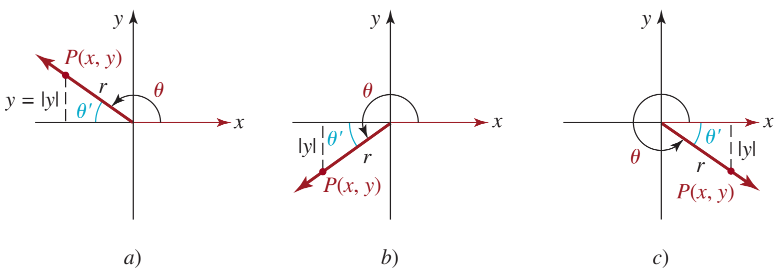



**FIGURA 8.4.9** Ángulos de referencia

Ahora podemos explicar un procedimiento paso por paso para determinar el valor de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo $\theta$.

**CÁLCULO DEL VALOR DE UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA**

Suponga que $\theta$ representa cualquier ángulo.

*i*) Obtenga el ángulo de referencia $\theta'$.

*ii*) Determine el valor de la función trigonométrica de $\theta'$.

*iii*) Seleccione el signo algebraico correcto del valor de *ii*); para ello, considere en qué cuadrante está situado el lado terminal del ángulo $\theta$.

## EJEMPLO 7 Calcular valores usando ángulos de referencia

Obtenga los valores exactos de $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ de cada uno de los siguientes ángulos.

***a***) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ***b***) $\theta = 210°$ ***c***) $\theta = -\dfrac{9\pi}{4}$

**Solución** Seguimos el procedimiento que acabamos de explicar junto con la tabla 8.3.1 de la sección 8.3.

***a***) En el inciso *b*) del ejemplo 6 encontramos que el ángulo de referencia de $\theta = 2\pi/3$ era $\theta' = \pi/3$. Ahora sabemos que $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, y $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Debido a que $\theta = 2\pi/3$ es un ángulo del cuadrante II, donde el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativos, concluimos que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

***b***) En relación con el inciso *c*) del ejemplo 6, observamos que el ángulo de referencia es $\theta' = 30°$. Usando la propiedad de los ángulos de referencia y el hecho de que el lado terminal de $\theta' = 210°$ se sitúa en el cuadrante III, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 210° &= -\operatorname{sen} 30° = -\frac{1}{2}, \\ \cos 210° &= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan 210° &= \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}\right\}$$

← consulte los signos algebraicos correctos en la figura 8.4.5

***c***) Por el inciso *d*) del ejemplo 6 sabemos que el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$. En vista de que $\theta - 9\pi/4$ es un ángulo del cuadrante IV, se desprende que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right) &= -\tan\frac{\pi}{4} = -1. \end{aligned}$$

≡

## EJEMPLO 8 Cálculo de ángulos

Calcule todos los ángulos $\theta$ que satisfacen $0° \le \theta < 360°$ tales que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

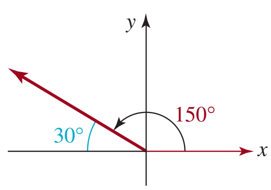


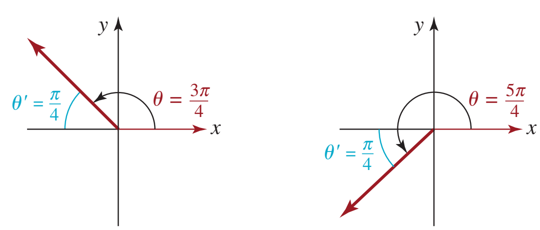

**FIGURA 8.4.10** Soluciones del ejemplo 8

**Solución** Por lo que sabemos de los ángulos especiales de 30°, 60° y 90°, nos damos cuenta de que $\theta = 30°$ es una solución. Usando 30° como ángulo de referencia en el segundo cuadrante, como se ilustra en la **FIGURA 8.4.10**, obtenemos $\theta = 150°$ como segunda solución. Como la función seno es negativa para los ángulos de los cuadrantes III y IV, no hay más soluciones que satisfagan $0° \le \theta < 360°$. ≡

## EJEMPLO 9 Cálculo de ángulos

Calcule todos los ángulos $\theta$ que satisfacen $0 \le \theta < 2\pi$ tales que $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$.

**Solución** Puesto que el valor dado de la función coseno es negativo, en primer lugar determinamos el ángulo de referencia $\theta'$ tal que $\cos\theta' = \sqrt{2}/2$. Por la sección 8.3 sabemos que $\theta' = \pi/4$. En virtud de que la función coseno es negativa para los ángulos de los cuadrantes II y III, colocamos el ángulo de referencia $\theta' = \pi/4$ como se muestra en la **FIGURA 8.4.11**. A continuación obtenemos $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$ como soluciones.

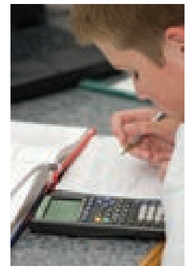



*a*) *b*)

**FIGURA 8.4.11** Soluciones del ejemplo 9

## *Notas del aula*

En esta sección deliberadamente evitamos usar calculadoras. Para comprender plenamente la trigonometría, es esencial que domine los conceptos y sea capaz de ejecutar, *sin la ayuda de una calculadora,* los tipos de cálculos y simplificaciones que hemos estudiado. Los siguientes ejercicios deben resolverse sin recurrir al uso de una calculadora.



## 8.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-21.

*Recomendamos que no use la calculadora para resolver ninguno de los siguientes problemas.*

En los problemas 1 a 10, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ si $\theta$ se encuentra en la posición estándar y el lado terminal de $\theta$ contiene el punto dado.

1. $(6, 8)$
2. $(-1, 2)$
3. $(5, -12)$
4. $(-8, -15)$
5. $(0, 2)$
6. $(-3, 0)$
7. $(-2, 3)$
8. $(5, -1)$
9. $(-\sqrt{2}, -1)$
10. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$

En los problemas 11 a 18, encuentre el cuadrante en el que se sitúa el lado terminal de un ángulo $\theta$ si $\theta$ satisface las condiciones dadas.

11. $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$
12. $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$
13. $\tan\theta < 0$ y $\sec\theta < 0$
14. $\sec\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$
15. $\cot\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$
16. $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$
17. $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$
18. $\tan\theta < 0$ y $\csc\theta > 0$

En los problemas 19 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo $\theta$. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de $\theta$.

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$, $\theta$ está en el cuadrante II
20. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$, $\theta$ está en el cuadrante II
21. $\tan\theta = 3$, $\theta$ está en el cuadrante III
22. $\cot\theta = 2$, $\theta$ está en el cuadrante III
23. $\csc\theta = -10$, $\theta$ está en el cuadrante IV
24. $\sec\theta = 3$, $\theta$ está en el cuadrante IV
25. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{5}$, $\cos\theta > 0$
26. $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{sen}\theta < 0$
27. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$
28. $\tan\theta = 8$, $\sec\theta > 0$
29. Si $\cos\theta = \frac{3}{10}$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$.
30. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{7}$, encuentre todos los valores posibles de $\cos\theta$.
31. Si $2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 0$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.
32. Si $\cot\theta = \frac{3}{4}$ , encuentre todos los valores posibles de $\csc\theta$.
33. Si $\sec\theta = -5$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.
34. Si $3\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, encuentre todos los valores posibles de $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

**35.** Complete la tabla siguiente.

| $\theta$ (grados) | $\theta$ (radianes) | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30° | $\pi/6$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 45° | $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 |
| 60° | $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| 90° | $\pi/2$ | 1 | 0 | — |
| 120° | $2\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}$ |
| 135° | $3\pi/4$ | | | |
| 150° | $5\pi/6$ | | | |
| 180° | $\pi$ | | | |
| 210° | $7\pi/6$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 225° | $5\pi/4$ | | | |
| 240° | $4\pi/3$ | | | |
| 270° | $3\pi/2$ | | | |
| 300° | $5\pi/3$ | | | |
| 315° | $7\pi/4$ | | | |
| 330° | $11\pi/6$ | | | |
| 360° | $2\pi$ | | | |

**36.** Complete la tabla siguiente.

| $\theta$ (grados) | $\theta$ (radianes) | csc $\theta$ | sec $\theta$ | cot $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | — | 1 | — |
| 30° | $\pi/6$ | 2 | $2\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\pi/4$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| 60° | $\pi/3$ | $2\sqrt{3}/3$ | 2 | $\sqrt{3}/3$ |
| 90° | $\pi/2$ | 1 | — | 0 |
| 120° | $2\pi/3$ | | | |
| 135° | $3\pi/4$ | | | |
| 150° | $5\pi/6$ | | | |
| 180° | $\pi$ | | | |
| 210° | $7\pi/6$ | | | |
| 225° | $5\pi/4$ | | | |
| 240° | $4\pi/3$ | | | |
| 270° | $3\pi/2$ | | | |
| 300° | $5\pi/3$ | | | |
| 315° | $7\pi/4$ | | | |
| 330° | $11\pi/6$ | | | |
| 360° | $2\pi$ | | | |

En los problemas 37 a 52, obtenga el valor exacto de la expresión dada.

**37.** $\cos 5\pi$

**38.** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$

**39.** $\cot \dfrac{13\pi}{6}$

**40.** $\tan \dfrac{9\pi}{2}$

**41.** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$

**42.** $\cos \dfrac{23\pi}{4}$

**43.** $\csc\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

**44.** $\tan \dfrac{23\pi}{4}$

**45.** $\sec(-120°)$

**46.** $\csc 495°$

**47.** $\operatorname{sen} 150°$

**48.** $\cos(-45°)$

**49.** $\tan 405°$

**50.** $\operatorname{sen} 315°$

**51.** $\cot(-720°)$

**52.** $\sec(-300°)$

En los problemas 53 a 58, obtenga todos los ángulos $\theta$, donde $0 \leq \theta < 360°$, que satisfagan la condición dada.

**53.** $\tan\theta = \sqrt{3}$

**54.** $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{1}{2}$

**55.** $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**56.** $\sec\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**57.** $\csc\theta = -1$

**58.** $\cot\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

En los problemas 59 a 64, obtenga todos los ángulos $\theta$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfagan la condición dada.

**59.** $\operatorname{sen}\theta = 0$

**60.** $\cos\theta = -1$

**61.** $\sec\theta = -\sqrt{2}$

**62.** $\csc\theta = 2$

**63.** $\cot\theta = -\sqrt{3}$

**64.** $\tan\theta = 1$

## Aplicaciones diversas

**65. Tiro libre** En ciertas condiciones, la altura máxima $y$ que alcanza un balón de basquetbol lanzado desde una altura $h$ a un ángulo $\alpha$ medido desde la horizontal, con velocidad inicial $v_0$ está dada por

$$y = h + (v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha)/2g,$$

donde $g$ es la aceleración debida a la gravedad. Calcule la máxima altura que alcanza un tiro libre si $h = 2.15$ m, $v_0 = 8$ m/s, $\alpha = 64.47°$ y $g = 9.81$ m/s$^2$.

Tiro libre

**66. Lanzamiento de bala** El rango de una bala lanzada desde una altura $h$ sobre el nivel del suelo, con velocidad inicial $v_0$ en ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal se puede aproximar con

$$R = \frac{v_0\cos\phi}{g}\left(v_0 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\phi + 2gh}\right),$$

donde $g$ es la aceleración debida a la gravedad.

***a***) Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\phi = 40°$ y $g = 9.81$ m/s$^2$, compare los rangos logrados por las alturas de lanzamiento $h = 2.0$ m y $h = 2.4$ m.

***b***) Explique por qué un incremento de $h$ produce incremento de $R$ si los demás parámetros se mantienen fijos.

***c***) ¿Qué implica esto sobre la ventaja que la altura le da a un lanzador de bala?

**67. Aceleración debida a la gravedad** Debido a su rotación, la Tierra se ensancha en el ecuador y se aplana en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad varía dependiendo de la latitud $\theta$. Los estudios satelitales han demostrado que la aceleración debida a la gravedad $g_{sat}$ se puede aproximar con la función

$$g_{sat} = 978.0309 + 5.18552 \operatorname{sen}^2\theta - 0.00570 \operatorname{sen}^2 2\theta.$$

***a***) Calcule $g_{sat}$ en el ecuador ($\theta = 0°$),

***b***) en el polo norte, y

***c***) a 45° latitud norte.

## Para la discusión

**68.** ¿Existe un ángulo $\theta$ tal que $\cos\theta = \frac{4}{3}$? Explique.

**69.** ¿Existe un ángulo $\theta$ tal que $2\csc\theta = 1$? Explique.

**70.** Explique cómo es posible determinar, sin la ayuda de una calculadora, que tanto sen 4 como cos 4 son negativos.

**71.** Sea $L$ una recta no vertical que pasa por el origen y forma un ángulo $\theta$ medido en sentido contrario a las agujas del reloj desde el eje $x$ positivo. Pruebe que la pendiente $m$ de la recta $L$ es $\tan\theta$ (**FIGURA 8.4.12**).

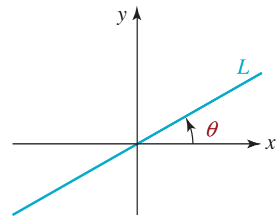



**FIGURA 8.4.12** Recta que pasa por el origen del problema 71

## Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Lado inicial de un ángulo
Lado terminal de un ángulo
Posición estándar de un ángulo
Ángulos coterminales
Minutos
Segundos
Medida en grados de un ángulo
Ángulo central
Medida en radianes de un ángulo
Ángulo agudo
Ángulos complementarios
Ángulo obtuso
Ángulo llano

Ángulo cuadrantal
Ángulos suplementarios
Ángulo recto
Longitud de arco
Conversión:
  grados a radianes
  radianes a grados
Ángulo de referencia
Triángulos rectángulos:
  cateto adyacente
  cateto opuesto
  hipotenusa

Funciones trigonométricas:
  de ángulos agudos
  de ángulos generales
Identidades por cociente
Identidades recíprocas
Identidades pitagóricas
Cofunciones
Identidades de cofunción

## CAPÍTULO 8 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

### A. Verdadero o falso

En los problemas 1 a 10, responda verdadero o falso.

**1.** $\operatorname{sen}(\pi/6) = \cos(\pi/3)$. ________

**2.** $\operatorname{sen}(\pi/2) = \operatorname{sen}(5\pi/2)$. ________

**3.** $\operatorname{sen}\frac{1}{2} = 30°$. ________

**4.** $\tan\pi = 0$. ________

**5.** $|\csc\theta| \leq 1$. ________

**6.** $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2(90° - \theta) = 1$. ________

**7.** Los ángulos de 120° y −240° son coterminales. ______

**8.** Si $\tan\theta = \frac{2}{5}$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 2$ y $\cos\theta = 5$. ________

**9.** Si $\sec\theta = \sqrt{7}$, entonces $\cos\theta = \sqrt{7}/7$. ________

**10.** 30′ es equivalente a 0.5°. ________

### B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 10, llene los espacios en blanco.

**1.** El complemento del ángulo agudo de 23° es ________.

**2.** Un ángulo de 1° en posición estándar está formado por ________ de una rotación completa en sentido contrario a las agujas del reloj de su lado terminal.

**3.** Un ángulo en posición estándar que tiene medida negativa se formó por una ________ rotación de su lado terminal.

**4.** El ángulo central $\theta$ de un círculo cuyo radio mide 8 pulgadas subtiende un arco de 12 pulgadas; la medida del ángulo $\theta$ en radianes es ________.

**5.** Si $\theta$ es un ángulo agudo medido en grados tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$, entonces el valor exacto de $3\cos(90° - \theta) =$ ________.

6. sec 51°/csc 49° = ________.

7. Si $\theta$ es un ángulo agudo medido en grados tal que cot $\theta = 2$, entonces el valor exacto de cot $\theta$ + cot(90° − $\theta$) = ________.

8. Si $\theta$ es un ángulo agudo tal que tan $\theta = \sqrt{3}$, entonces $\theta$ = ________.

9. El ángulo de referencia de $4\pi/3$ es ________.

10. $\pi$ radianes = ________ grados.

## C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, dibuje el ángulo dado en posición estándar.

1. $-5\pi/6$
2. $7\pi/3$
3. 225°
4. −450°

En los problemas 5 a 8, convierta el ángulo dado a radianes.

5. −120°
6. 1°
7. 48.3°
8. 14°14′

En los problemas 9 a 12, convierta el ángulo dado a grados decimales.

9. $\pi/9$
10. 78°15′
11. 2.3
12. $7\pi/3$

En los problemas 13 a 16, convierta el ángulo dado a grados, minutos y segundos.

13. 70.5°
14. 170.15°
15. 3.1
16. $\pi/10$

En los problemas 17 y 18, encuentre dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

17. 85°
18. $7\pi/6$

En los problemas 19 a 22, evalúe las seis funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ si $\theta$ está en posición estándar y el lado terminal de $\theta$ contiene el punto dado.

19. $(-1, 2)$
20. $(4, 7)$
21. $(-0.5, -0.3)$
22. $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

En los problemas 23 a 28, se proporciona el valor de una de las funciones trigonométricas del ángulo $\theta$. Con base en el valor dado y la información adicional, determine los valores de cinco funciones trigonométricas restantes de $\theta$.

23. $\cos\theta = -\frac{1}{7}$, $\theta$ está en el cuadrante III.
24. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$, $\theta$ está en el cuadrante II.
25. $\cot\theta = -5$, $\theta$ está en el cuadrante IV.
26. $\sec\theta = 15$, $\operatorname{sen}\theta < 0$
27. $\csc\theta = -7$, $\tan\theta > 0$
28. $\tan\theta = \frac{1}{9}$, $\sec\theta < 0$
29. Si $\cot\theta = -4$, encuentre todos los valores posibles de sen $\theta$, cos $\theta$, tan $\theta$, sec $\theta$ y csc $\theta$.
30. Si 4 sen $\theta$ = 3 cos $\theta$, encuentre todos los valores posibles de sen $\theta$, cos $\theta$, tan $\theta$, sec $\theta$ y csc $\theta$.

En los problemas 31 a 34, encuentre el valor exacto de la expresión dada. No use la calculadora.

31. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
32. $\csc\frac{13\pi}{6}$
33. tan 495°
34. sen 330°

En los problemas 35 a 38, encuentre todos los ángulos $\theta$, si $0° \le \theta < 360°$, que satisfagan la condición dada. No use la calculadora.

35. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
36. $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
37. $\sec\theta = -2$
38. $\csc\theta = -\sqrt{2}$

En los problemas 39 a 42, encuentre todos los ángulos $\theta$, si $0 \le \theta < 2\pi$, que satisfagan la ecuación dada. No use la calculadora.

39. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
40. $\csc\theta = -1$
41. $\cot\theta = -1$
42. $\cos\theta = \frac{1}{2}$